

### Esercizio n. 15

Due sbarrette sottili di materiale isolante e lunghezza  $L$ , portano rispettivamente carica  $Q_1$  e  $Q_2$ . Entrambe queste cariche sono distribuite uniformemente sulla lunghezza  $L$  delle sbarre.

Le barrette stanno sull'asse  $x$ , con i loro centri distanti  $d$ .

Calcolare la forza  $F$  tra le barrette.

Valori numerici:  $Q_1=5 \cdot 10^{-9}$  C,  $Q_2=10^{-8}$  C,  $d=15$  cm,  $L=10$  cm.

### Soluzione:

Essendo cariche positivamente, le due barrette si respingono. La forza  $\vec{F}_{21}$  esercitata sulla barretta 2 dalla barretta 1 è uguale in modulo e direzione ed opposta in verso alla forza  $\vec{F}_{12}$  esercitata sulla barretta 1 dalla barretta 2:

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} = \vec{F}$$

$\vec{F} = \vec{F}_{21}$  ha direzione e verso dell'asse  $x$ . Il suo modulo può essere ottenuto valutando il campo prodotto dalla barretta 1 nella posizione della barretta 2 e poi calcolando la forza di questo campo sulla barretta 2.

Il campo prodotto dalla barretta 1 nel generico punto  $P \equiv (h, 0)$  dell'asse  $x$  (vedi figura) ha direzione e verso dell'asse  $x$ . Il suo modulo si ottiene sommando (cioè integrando) i contributi al campo dovuti a tutti gli elementi infinitesimi  $dq = \lambda dx$  in cui la carica della barretta può essere divisa.

Un elemento di lunghezza  $dx$ , possedendo carica  $dq = \lambda dx = \frac{Q}{L} dx$ , e produce in  $P$  un campo parallelo all'asse  $x$  e con modulo

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{(y-x)^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L} \frac{dx}{(y-x)^2}.$$

Il campo elettrico in  $P$  (a distanza  $h$  dall'origine) è quindi

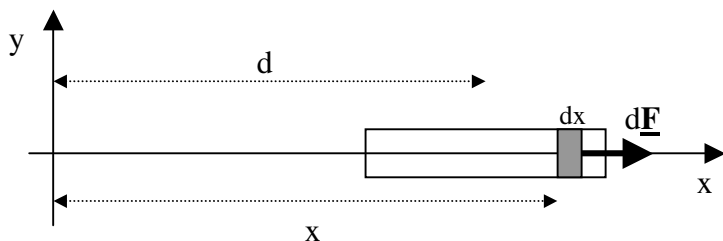
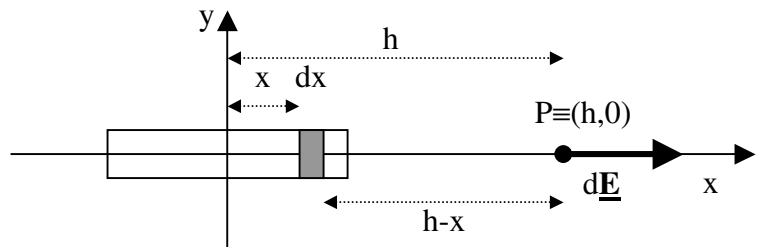
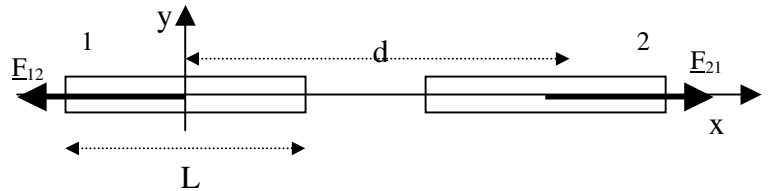
$$E(h) = \int_0^E dE = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L} \frac{dx}{(h-x)^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L} \left( \frac{1}{h-\frac{L}{2}} - \frac{1}{h+\frac{L}{2}} \right)$$

(tutti i  $dq = \lambda dx$  contribuiscono al campo in  $P$  con vettori orientati come l'asse  $x$ ).

Ciascun elemento infinitesimo di carica

$dq = \lambda dx = \frac{Q}{L} dx$  della barretta 2 (vedi

figura), a distanza  $x$  dall'origine, risente del campo  $E$  in  $x$ . La forza subita da questo elemento di carica è orientata come l'asse  $x$  ed ha modulo



$$dF = E(x) dq = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o L} \left( \frac{1}{x - \frac{L}{2}} - \frac{1}{x + \frac{L}{2}} \right) \lambda dx = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o L} \left( \frac{1}{x - \frac{L}{2}} - \frac{1}{x + \frac{L}{2}} \right) \frac{Q}{L} dx =$$

$$= \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_o L^2} \left( \frac{1}{x - \frac{L}{2}} - \frac{1}{x + \frac{L}{2}} \right) dx$$

La forza totale F sulla barretta 2 si ottiene sommando le forze dF sugli infiniti elementi infinitesimi di carica contenuta sulla barretta:

$$F = \int_{d - \frac{L}{2}}^{d + \frac{L}{2}} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_o L^2} \left( \frac{1}{x - \frac{L}{2}} - \frac{1}{x + \frac{L}{2}} \right) dx = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_o L^2} \left[ \ln \left( \frac{d}{d - L} \right) - \ln \left( \frac{d + L}{d} \right) \right] = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_o L^2} \ln \left( \frac{d^2}{d^2 - L^2} \right)$$


---